

# 不安定粒子と共鳴

- 2種類のスカラー場 $\varphi$ と $\chi$ を導入

Lagrangian:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi - \frac{1}{2}m_\varphi^2\varphi^2 - \frac{1}{2}\partial^\mu\chi\partial_\mu\chi - \frac{1}{2}m_\chi^2\chi^2 + \frac{1}{2}g\varphi\chi^2 + \frac{1}{6}h\varphi^3 \quad (m_\varphi > 2m_\chi)$$

- 経路積分は

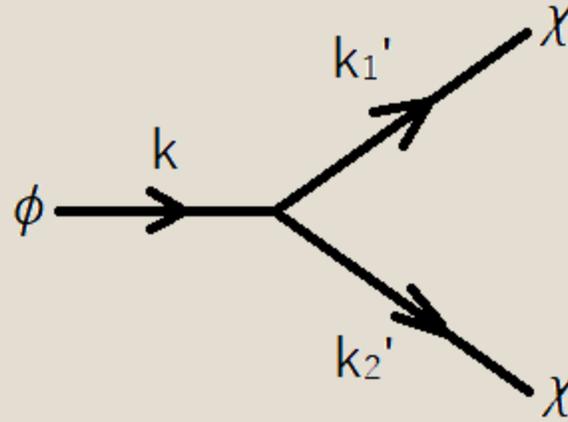
$$\langle 0|0\rangle = \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\chi \exp \left[ i \int d^6x \left( \frac{1}{2}g\varphi\chi^2 + \frac{1}{6}h\varphi^3 \right) \right] \underbrace{Z_0(J_\varphi, J_\chi)}_{\text{Freeな真空期待値}}$$

$\varphi$ と $\chi$ に対応したSource

となり、Feynman Diagramを構成するPropagator及びVertexは2種類

- Diagramの中で現れるものとして $\varphi \rightarrow \chi\chi$ の反応がある。

→ 粒子 $\varphi$ は不安定。2つの粒子 $\chi$ に崩壊



$\phi \rightarrow \chi\chi$  反応

- このDiagramは  $g$  の1次として現れるもの。

このTreeレベルDiagramの振幅は  $\mathcal{T} = g$

- $\phi \rightarrow \chi\chi$  における結合定数  $g$  の値を厳密な3点頂点関数  $V_3(k, k_1', k_2')$  の値として定義すると、Diagramの振幅は厳密に

$$\mathcal{T} = g$$

となる。

◦この崩壊反応の微分崩壊率は

$$d\Gamma = \frac{1}{2m_\phi} dLIPS_2 |\mathcal{T}|^2。$$

11章での議論同様、 $dLIPS_2$ はLorentz不変な測度

$$dLIPS_2 = (2\pi)^6 \delta^6(k - k'_1 - k'_2) \widetilde{d}k'_1 \widetilde{d}k'_2$$

であり $k$ の空間成分は重心系をとって0とする。

$\widetilde{d}k$ は1粒子ごとの(Lorentz不変な)測度が

$$\frac{d^6k}{(2\pi)^6} 2\pi \delta(k^2 + m_\chi^2) \theta(k^0)$$

で与えられることからこれを $k^0$ 積分することで

$$\widetilde{d}k = \frac{d^5k}{(2\pi)^5 2\omega} \quad (\omega = \sqrt{\mathbb{k}^2 + m_\chi^2})$$

のようにできる。

- $dLIPS_2$ の具体的な形が与えられたので、微分崩壊率 $d\Gamma$ を計算。  
11章と同様に計算。6次元の $\delta$ 関数を

$$\delta^6(k'_1 + k'_2 - k) = \delta(E'_1 + E'_2 - \sqrt{s})\delta^5(\mathbb{k}'_1 + \mathbb{k}'_2)$$

$$E'_i = \sqrt{\mathbb{k}'_i{}^2 + m_\chi^2} \quad (i = 1, 2)$$

のように分割、5次元の $\delta$ 関数を処理すると2つある測度は1つに。

$d^5k$ を極座標へ変換するとJacobianを含めて

$$d^5k = |\mathbb{k}|^4 d|\mathbb{k}| \underbrace{d\Omega}_{\text{角度成分}}$$

であることに気を付けると動径成分を計算して $dLIPS_2$ は

$$dLIPS_2 = \frac{|\mathbb{k}'_1|^3}{64\pi^4 m_\varphi} d\Omega \quad \left( |\mathbb{k}'_1| = \frac{1}{2} \sqrt{m_\varphi^2 - 4m_\chi^2} \right)$$

となる。

◦ 総崩壊率 $\Gamma$ は

$$\Gamma = \int d\Gamma = \frac{g^2}{2m_\varphi} \frac{|\mathbb{k}'_1|^3}{64\pi^4 m_\varphi} \int d\Omega$$

$$\int d\Omega = \Omega_5 = \frac{2\pi^{\frac{5}{2}}}{\Gamma(\frac{5}{2})} = \frac{8}{3}\pi^2$$

$$\therefore \Gamma = \frac{1}{12} \pi \alpha \left(1 - \frac{4m_\chi^2}{m_\varphi^2}\right)^{\frac{3}{2}} m_\varphi \quad \left(\alpha = \frac{g^2}{(4\pi)^3}\right)$$

崩壊率及び  
散乱行列 $\mathcal{T}$ は  
LSZ公式に  
結びついている

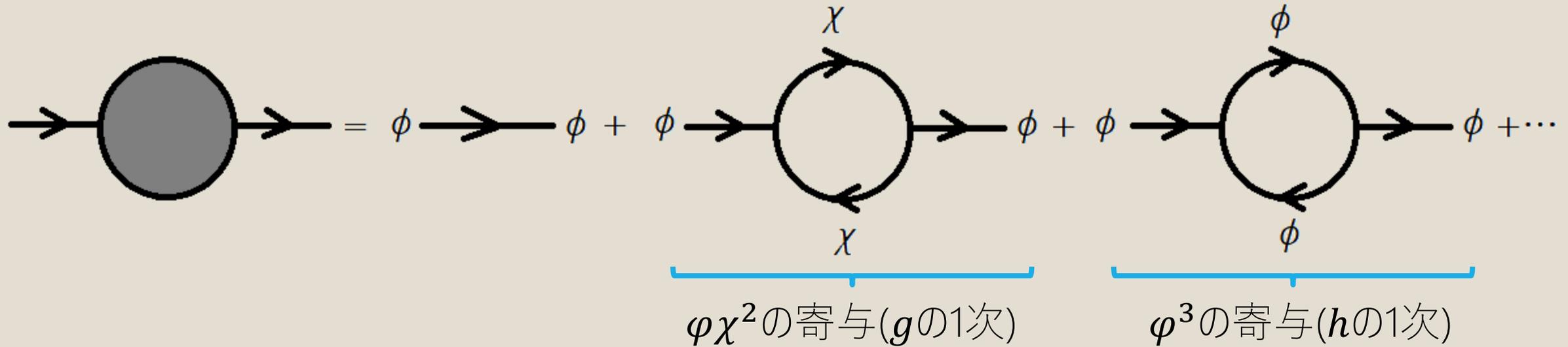
となる。

◦ LSZ簡約公式は入射・出射粒子は共に1粒子状態で記述されるものだった。

しかし、崩壊する粒子は明らかに1粒子状態として扱えない=根本的な問題

→かわりに $\varphi$  PropagatorのLoop補正を考える。

◦  $\phi$  PropagatorのLoop補正=2点関数を考える



$h \ll g$ であるとするると $\phi$  Loopを持つDiagramは $\chi$  Loopを持つものに比べて無視できる。

14章と同様に1PI Diagramの和(=自己エネルギー)を計算すると

$$\Pi(k^2) = \frac{1}{2} \alpha \int_0^1 dx D \ln D - Ak^2 - Bm_\phi^2$$

$$(D = x(1-x)k^2 + m_\chi^2 - i\epsilon)$$

Counterterm  
係数( $\in \mathbb{R}$ )

の形で考えられる。

- 14章では質量が1種類しかなかったのに比べて今は2種類の質量がある。

特にon-shellな $D$ は

$$D_0 = x(x-1)m_\phi^2 + m_\chi^2 = m_\phi^2 \left\{ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4m_\chi^2 - m_\phi^2}{4m_\phi^2} \right\}$$

となり、 $(x_-, x_+)$ の領域で負の値を持つ。

$$\left( x_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4m_\chi^2}{m_\phi^2}} \right)$$

→この領域で $\ln D$ は虚部を持つようになり、これはCounterterm係数 $A, B$ では打ち消せない( $A, B \in \mathbb{R}$ )。

→虚部は残ることになるので繰り込み条件としては $\Pi(-m_\phi^2) = 0, \Pi'(-m_\phi^2) = 0$ ではなく $\text{Re}\Pi(-m_\phi^2) = 0, \text{Re}\Pi'(-m_\phi^2) = 0$ を課す。

質量が1種類しかない時はon-shellな $D$ は全ての領域で正だった

◦ 自己エネルギーはこの条件のもとで

$$\begin{aligned}\Pi(-m_\varphi^2) &= \frac{1}{2}\alpha \int_0^1 dx (-|D_0|)(\ln|D_0| - i\pi) + (A - B)m_\varphi^2 \\ &= \underbrace{-\frac{1}{2}\alpha \int_0^1 dx |D_0| \ln|D_0| + (A - B)m_\varphi^2}_{\text{繰り込み条件で消える}} + i \underbrace{\frac{1}{2}\alpha\pi \int_0^1 dx |D_0|}_{\text{一部の領域で残る虚部}}\end{aligned}$$

という形になり、また実部の計算は14章のものと全く同じ形をとる。

$$\begin{aligned}Re\Pi(k^2) &= -\frac{1}{2}\int_0^1 dx |D| \ln\left(\frac{|D|}{|D_0|}\right) - \frac{1}{12}\alpha(k^2 + m_\varphi^2) \\ \rightarrow \Pi(k^2) &= \frac{1}{2}\int_0^1 dx D \ln\left(\frac{|D|}{|D_0|}\right) - \frac{1}{12}\alpha(k^2 + m_\varphi^2) - i\frac{1}{2}\alpha\pi \int_0^1 dx D \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 dx D \ln\left(\frac{|D|}{|D_0|} - i\pi\right) - \frac{1}{12}\alpha(k^2 + m_\varphi^2) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 dx D \ln\left(\frac{D}{|D_0|}\right) - \frac{1}{12}\alpha(k^2 + m_\varphi^2)\end{aligned}$$

- 自己エネルギーの虚部を計算。

そもそも  $(x_-, x_+)$  の領域でのみ生じるものなので

$$Im\Pi(k^2) = -\frac{1}{2}\pi\alpha \int_{x_-}^{x_+} dx D。$$

$$\begin{aligned} Im\Pi(k^2) &= -\frac{1}{2}\pi\alpha \int_{x_-}^{x_+} dx [x(1-x)k^2 + m_\chi^2] \\ &= -\frac{1}{2}\pi\alpha \left[ \left( \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right) k^2 + m_\chi^2 x \right]_{x_-}^{x_+} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{12}\pi\alpha \left( 1 + \frac{4m_\chi^2}{k^2} \right)^{\frac{3}{2}} k^2 \quad \underbrace{(k^2 < -4m_\chi^2)}$$

On-shellな運動量を含む

- On-shellな点では

$$Im\Pi(-m_\phi^2) = \frac{1}{12}\pi\alpha \left( 1 - \frac{4m_\chi^2}{m_\phi^2} \right)^{\frac{3}{2}} m_\phi^2 = m_\phi \Gamma \quad \therefore Im\Pi(-m_\phi^2) = m_\phi \Gamma$$

◦  $\phi$  PropagatorのLoop補正を考えていたら崩壊率が出てきた。

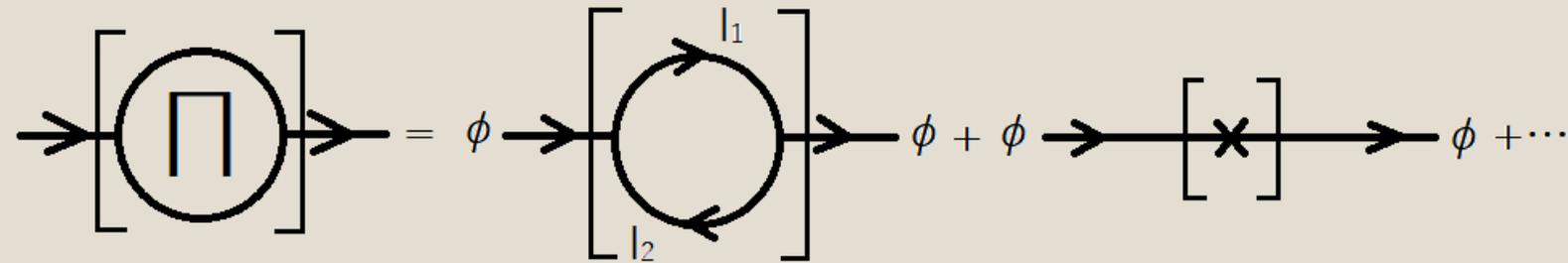
↑このことを2つの方法で議論する。

1. Feynman Diagramの数学的側面から

2. 量子力学の共鳴散乱の物理的側面から

### 1. Feynman Diagramの数学的側面から

◦ 自己エネルギー $-(i\Pi(k^2))$ のDiagram的意味 = 1PI Diagramの総和



$$= \frac{1}{2} (ig)^2 \int \frac{d^6 l_1}{(2\pi)^6} \frac{d^6 l_2}{(2\pi)^6} (2\pi)^6 \delta^6(l_1 + l_2 - k) \frac{-i}{l_1^2 + m_\chi^2 - i\epsilon} \frac{-i}{l_2^2 + m_\chi^2 - i\epsilon}$$

便宜上2つのLoop因子を入れる。

(実質 $\delta$ 関数によって1つは固定されている。)

$$- i(Ak^2 + Bm_\phi^2) + \mathcal{O}(g^4)$$

◦ 一般に  $\frac{1}{x-i\epsilon} = P \frac{1}{x} + i\pi\delta(x)$  が成立することから ( $P \frac{1}{x}$  は  $\frac{1}{x}$  の主値積分対応部分) 自己エネルギーは

$$\begin{aligned} \Pi(k^2) = & -\frac{1}{2} i g^2 \int \frac{d^6 l_1}{(2\pi)^6} \frac{d^6 l_2}{(2\pi)^6} (2\pi)^6 \delta^6(l_1 + l_2 - k) \\ & \times \left( \underbrace{P \frac{1}{l_1^2 + m_\chi^2 - i\epsilon}}_{\equiv P_1} + \underbrace{i\pi\delta(l_1^2 + m_\chi^2)}_{\equiv \delta_1} \right) \left( \underbrace{P \frac{1}{l_2^2 + m_\chi^2 - i\epsilon}}_{\equiv P_2} + \underbrace{i\pi\delta(l_2^2 + m_\chi^2)}_{\equiv \delta_2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Im}\Pi(k^2) = & -\frac{1}{2} g^2 \int \frac{d^6 l_1}{(2\pi)^6} \frac{d^6 l_2}{(2\pi)^6} (2\pi)^6 \delta^6(l_1 + l_2 - k) \underbrace{(P_1 P_2 - \pi^2 \delta_1 \delta_2)}_{\equiv \int} \\ = & -\frac{1}{2} g^2 \int (P_1 P_2 - \pi^2 \delta_1 \delta_2) \end{aligned}$$

とまとまる。

- ここで遅延 & 先行Propagatorを導入することで積分を簡単化する。

Feynman Propagatorは

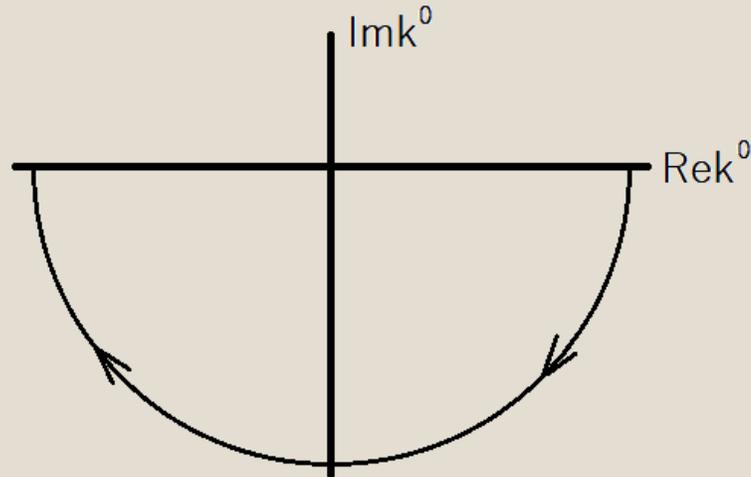
$$\Delta(x - y) = \int \frac{d^5k}{(2\pi)^6} e^{ik \cdot (x-y)} \int dk^0 \frac{e^{-ik^0(x^0-y^0)}}{-(k^0)^2 + \omega^2}$$

のように $k^0$ 積分を分離して考えたときに、この積分が発散しないための積分経路は $x^0$ と $y^0$ の大小関係(=因果律)によって変わってくる。

$x^0 > y^0$ では

$$e^{-iRek^0|x^0-y^0|} \overbrace{e^{Imk^0|x^0-y^0|}}^{0に収束すればいい}$$

となるので $Imk^0 < 0$ つまり $k^0$ の複素平面において下半分を回る積分経路をとった時に発散しない。



◦しかし、この非積分関数は $k^0 = \pm\omega (= \pm\sqrt{\mathbb{k}^2 + m^2})$ を極に持つので、この経路積分は極を通ることになる。

仮に実軸上にあるこの極が実軸よりも少し上にズレれば $k^0$ 積分は0になり発散しない。

“実軸上の点を少しだけ上にずらす = 実軸を少しだけ下にずらす”ということに気を付けると、そのためには $k^0 \rightarrow k^0 - i\epsilon$ と置き換えればよいことになる。

$$\begin{aligned} \Delta(x - y) &\rightarrow \int \frac{d^5k}{(2\pi)^6} \int dk^0 \frac{e^{ik(x-y)}}{-(k^0 - i\epsilon)^2 + \omega^2} \\ &= \int \frac{d^6k}{(2\pi)^6} \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 + m^2 + 2ik^0\epsilon} \sim \int \frac{d^6k}{(2\pi)^6} \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 + m^2 + \underbrace{isign(k^0)\epsilon}} \equiv \Delta_{ret}(x - y) = 0 \end{aligned}$$

符号の影響のみ残している

つまり $x^0 > y^0$ で $\Delta_{ret}(x - y) = 0$ となる。

この $\Delta_{ret}(x - y)$ を遅延Propagatorという。

- 逆に  $x^0 < y^0$  の場合には積分経路は上半分となり、同様の議論から導かれるのは

$$\int \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 + m^2 - i \text{sign}(k^0) \epsilon} \equiv \Delta_{adv}(x-y) = 0。$$

この  $\Delta_{adv}(x-y)$  を先行 Propagator という。

- この2種類の Propagator を用いると 自己エネルギーの虚部をとることは積  $\Delta_{ret}(x-y)\Delta_{adv}(x-y)$  の Fourier 変換の実部をとることに似ていることがわかる。

$$\begin{aligned} \int d^6(x-y) e^{-ik(x-y)} \Delta_{ret}(x-y) \Delta_{adv}(x-y) \\ = \int \frac{d^6 l_1}{(2\pi)^6} \frac{d^6 l_2}{(2\pi)^6} (2\pi)^6 \delta^6(l_1 + l_2 - k) \frac{1}{l_1^2 + m_\chi^2 + i s_1 \epsilon} \frac{1}{l_2^2 + m_\chi^2 - i s_2 \epsilon} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Re} \int d^6(x-y) e^{-ik(x-y)} \Delta_{ret}(x-y) \Delta_{adv}(x-y) = \int (P_1 P_2 + \pi^2 s_1 s_2 \delta_1 \delta_2) \\ (s = \text{sign}(l^0)) \end{aligned}$$

となり、 $\text{Im}\Pi(k^2)$  の積分に似た形となる。

◦  $\Delta_{ret}(x-y)\Delta_{adv}(x-y)$ は $x^0 \geq y^0$ で0となる。

→  $Im\Pi(k^2)$ から  $\int(P_1P_2 + \pi^2 s_1 s_2 \delta_1 \delta_2)$  を引いてもその積分の値は変わらない。

$$\begin{aligned} Im\Pi(k^2) &= -\frac{1}{2}g^2 \left[ \int(P_1P_2 - \pi^2 \delta_1 \delta_2) - \int(P_1P_2 + \pi^2 s_1 s_2 \delta_1 \delta_2) \right] \\ &= \frac{1}{2}g^2 \pi^2 \int(1 + s_1 s_2) \delta_1 \delta_2 \end{aligned}$$

◦ この積分内の $\delta$ 関数 $\delta(l_1^0 + l_2^0 - k^0)$ によって $l_1^0 + l_2^0 = k^0$ である場合のみを考えればよくなり、また $k^0$ は崩壊する $\varphi$ 粒子のエネルギーであるから、前述の通り $k^0 = m_\varphi > 0$ 。

$Im\Pi(k^2)$ は $l_1, l_2$ に関して積分を行なうが、 $l_1$ と $l_2$ が異符号であれば0になるので、結局は $l_1$ と $l_2$ が同符号である場合のみを考えればよいことになる。

→ 上の事項と合わせると $l_1^0, l_2^0 > 0$ でないといけない。

→  $1 + s_1 s_2$ は $2\theta(l_1^0)\theta(l_2^0)$ と置き換えることができる。

◦ 以上を踏まえて正確に  $Im\Pi(k^2)$  を書き直すと

$$\begin{aligned} Im\Pi(k^2) &= \frac{1}{2} g^2 \pi^2 \int \frac{d^6 l_1}{(2\pi)^6} \frac{d^6 l_2}{(2\pi)^6} (2\pi)^6 \delta^6(l_1 + l_2 - k) 2\theta(l_1^0) \theta(l_2^0) \delta(l_1^2 + m_\chi^2) \delta(l_2^2 + m_\chi^2) \\ &= \frac{1}{4} g^2 \int \frac{d^6 l_1}{(2\pi)^6} \frac{d^6 l_2}{(2\pi)^6} (2\pi)^6 \delta^6(l_1 + l_2 - k) \\ &\quad \times 2\pi \delta(l_1^2 + m_\chi^2) \theta(l_1^0) 2\pi \delta(l_2^2 + m_\chi^2) \theta(l_2^0). \end{aligned}$$

この崩壊過程の散乱振幅が  $\mathcal{T} = g$  であり、

Lorentz不変な測度が  $\int \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} 2\pi \delta(k^2 + m_\chi^2) \theta(k^0) = \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5 2\omega} = \int \widetilde{d\mathbf{k}}$  であることから、

on-shellな運動量  $k^2 = -m_\phi^2$  では

$$Im\Pi(-m_\phi^2) = \frac{1}{4} \int dLIPS_2 |\mathcal{T}|^2$$

$$\therefore Im\Pi(-m_\phi^2) = m_\phi \Gamma$$

この結果はより高次の摂動論においても成立するものである。

ここでの解析は  
Feynman Diagramの  
虚部を計算する方法と  
してCutkosky則という  
形で一般化されている。